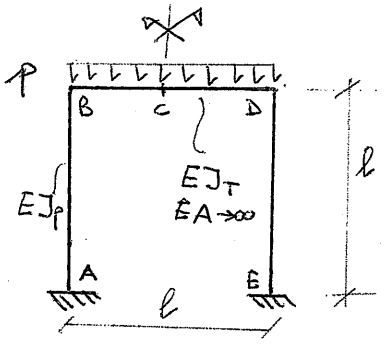
TEORIA DELLE STRUTTURE (Ing. R. BARSOTTI)

INTRODUZIONE al METODO DEGLI SPOSTAMENTI

↓

SI USA IN ALTERNATIVA AL METODO DELLE FORZE O ALLE eq. DELLA LINEA ELASTICA, SOPRATTUTTO PER STRUTTURE MOLTE VOLTE IPERSTATICHE.

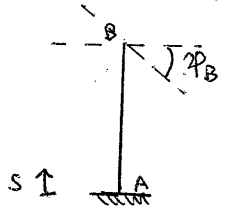


UN SEMPLICE PORTALE CON INCASTRI ALLA BASE DELLA COLONNA

↳ 3 VOLTE IPERSTATICO

↳ COL METODO DELLE FORZE AVREI 3 EQ DI CONGRUENZA IN 3 INCOGNITE (DA SCEGLIERE CON CURA)

CONSIDERO AB



IN B PUO' SOLO RUOTARE DI φ_B. (NON PUO' TRASLARE ORIZZONTALMENTE IN QUANTO BD È INESTENSIBILE, E UNO SPOSTAMENTO DI B SAREBBE CORRISPOSTO DA UNO SPOSTAMENTO SIMMETRICO DI D, CON ALLUNGAMENTO DI BD)

$$\begin{cases} EJ v^{IV}(s) = 0 \\ + \\ 4 \text{ CONDIZIONI AL BORDO} \end{cases} \Rightarrow \qquad a + bs + cs^2 + ds^3 = v(s)$$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v(\ell) = 0 \\ v'(\ell) = \varphi_B \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -\varphi_B / \ell \\ d = \varphi_B / \ell^2 \end{cases}$$

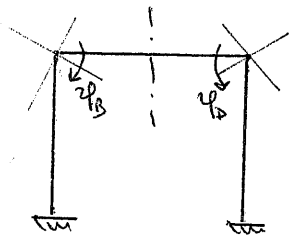
$$v(s) = \varphi_B \left(-\frac{s^2}{\ell} + \frac{s^3}{\ell^2} \right) \longrightarrow \text{OTTENGO } v''(s) = \varphi_B \left(-\frac{2}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} \right)$$

SO DALLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI:

$$\begin{cases} \chi = -v''(s) & \text{COMPATIBILITA' CINEMATICA} \\ M = EJ\chi & \text{LEGAME COSTITUTIVO} \\ M' = T \text{ e } T' = -p & \text{EQ. DI EQUILIBRIO} \end{cases}$$

DUNQUE CONOSCENDO φ_B CONOSCO LA SOLUZIONE IN TERMINI DI DEFORMAZIONI E CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

OSSERVANDO CHE PER SIMMETRIA $\boxed{\varphi_B = -\varphi_D}$

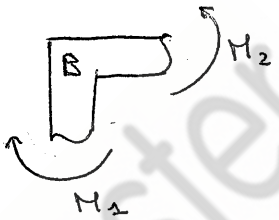


↓

MI BASTA CONOSCERE UN PARAMETRO φ_B PER RISOLVERE IL PROBLEMA → HO UNA SOLA EQUAZIONE DA DETERMINARE

↓

[EQUILIBRIO DEL NODO ALLA ROTAZIONE]



(POSITIVO SE ORARIO)

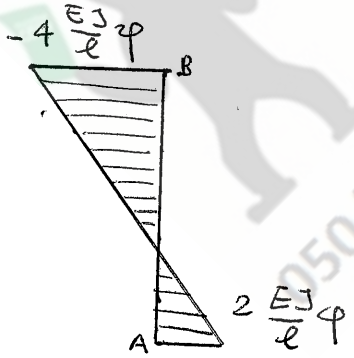
$M_1 - M_2 = 0$

HO TROVATO (PONENDO $x = \frac{s}{\ell}$) (linea elastica)

$$\begin{cases} v(s) = \varphi \cdot \ell \,(x^3 - x^2) \\ M(s) = -EJ\frac{\varphi}{\ell}(6x-2) \longrightarrow M(A) = M(0) = 2\frac{EJ}{\ell}\varphi \end{cases}$$

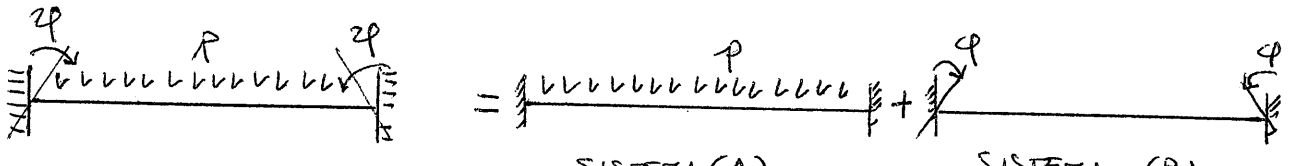
$$M(B) = M(1) = -4\frac{EJ}{\ell}\varphi = M_1$$

SU AB HO



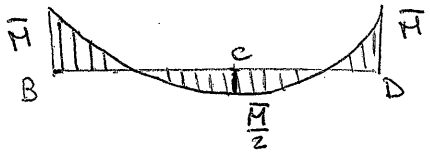
DEVO TROVARE M_2

PER M_2 : SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

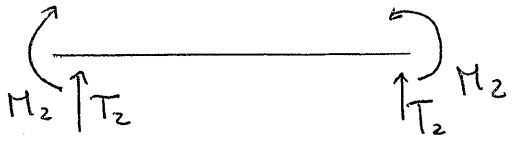


SISTEMA (A) SISTEMA (B)

master copy COPISTERIA 050/8312126 3881983745

SISTEMA (A) 

$\bar{M} = -\frac{p\ell^2}{12}$

SISTEMA (B) 

$T = 0$ (EQUILIBRIO)

$M = \text{cost} = \bar{M}$

$$\chi = \frac{M}{EJ} = -\varphi' \Rightarrow \int_B^C \chi\, ds = \int_B^C \frac{\bar{M}}{EJ}\, ds = \int_B^C -\varphi'\, ds = \varphi_B - \varphi_C = 2\varphi$$

(costante)

OVVERO $$\int_B^C \chi\, ds = \int_B^C \frac{\bar{M}}{EJ}\, ds = \frac{\bar{M}}{EJ}\cdot \ell = 2\varphi \rightarrow \bar{M} = 2\frac{EJ}{\ell}\varphi$$

DUNQUE $$M_2 = \left(2\frac{EJ}{\ell}\right)\varphi - \left(\frac{p\ell^2}{12}\right)$$

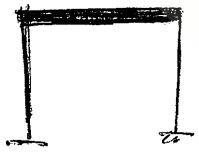
$$\boxed{M_1 = M_2} \longrightarrow \left(4\frac{EJ_p}{\ell} + 2\frac{EJ_T}{\ell}\right)\varphi = p\frac{\ell^2}{12}$$

HO 1 EQ IN 1 INCOGNITA

Ipotizziamo $J_p \neq J_T$ → PER ESEMPIO $EJ_T = K\,EJ_p$

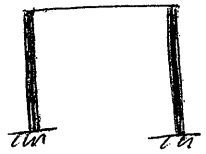
OTTENGO $$\frac{EJ}{\ell}_p\,(4+2K)\varphi = p\frac{\ell^2}{12} \Rightarrow \boxed{\varphi_B = \frac{p\ell^3}{12\,EJ_p}\cdot\frac{1}{(4+2K)}}$$

- $K \rightarrow \infty$: TRAVE RIGIDA, PILASTRI FLESSIBILI



$\varphi \rightarrow 0$

- $K \rightarrow 0$: TRAVE FLESSIBILE, PILASTRI RIGIDI



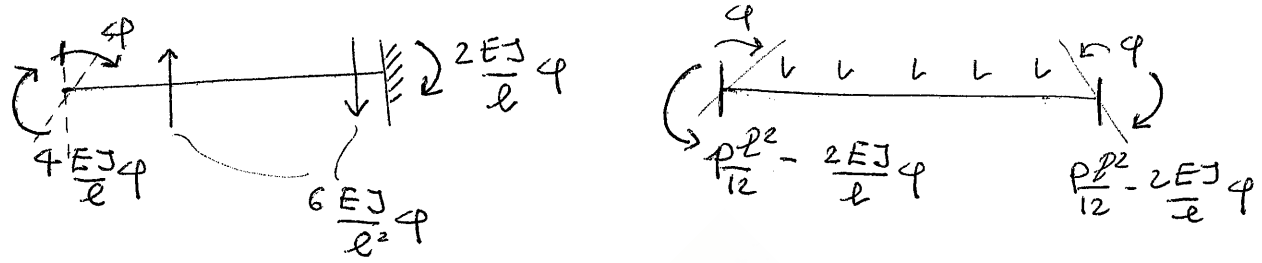
$\varphi = \frac{p\ell^3}{48EJ}$ (ROTAZIONE DELLA TRAVE INCASTRATA)

NEL METODO DEGLI SPOSTAMENTI HA SEMPLIFICATO IL PROBLEMA
↳ DA 3 INCOGNITE A 1 INCOGNITA.

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

FORMALIZZAZIONE DEL METODO

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI (D'ORA IN POI MdS) FUNZIONA BENE SE CONOSCO ALCUNI RISULTATI PARZIALI, COME QUELLI DETERMINATI NELL'ESEMPIO PRECEDENTE



- INDIVIDUO IL SISTEMA STRUTTURALE → STRUTTURA → ELEMENTI = enti di cui conosco il legame costitutivo AZIONI-DISTORSIONI; STRUTTURA → NODI
  + AZIONI

- INDIVIDUO I GRADI DI LIBERTÀ (gdL)
  (PER ESEMPIO: HO n gdL)

- SCRIVO n eq LINEARI INDIPENDENTI $\Rightarrow$ $\underline{\underline{K}} \cdot \underline{d} = \underline{f}$
  (SISTEMA MATRICIALE)

$\underline{\underline{K}}$ = MATRICE DELLE RIGIDEZZE

$\underline{d}$ = VETTORE dei gdL

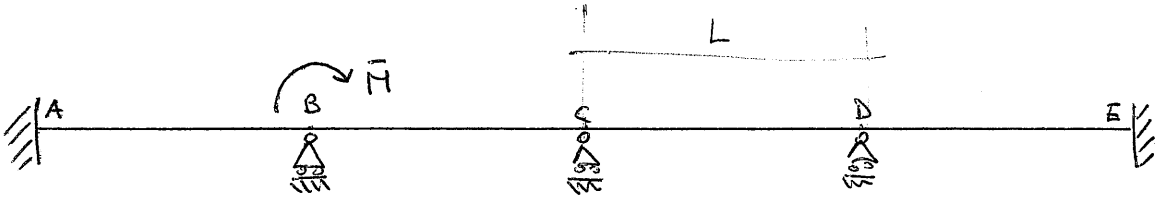
$\underline{f}$ = MATRICE DEI CARICHI

SE GLI UNICI SPOSTAMENTI SONO ROTAZIONI DEI NODI PARLO DI

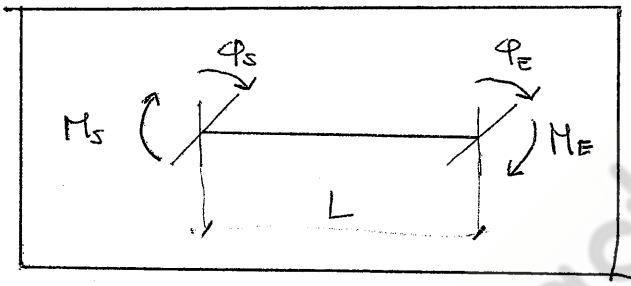
TELAI A NODI FISSI

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

ESERCIZIO SVOLTO: TELAI PIANI DI TRAVI RETTILINEE A NODI FISSI (HO SOLO ROTAZIONI)

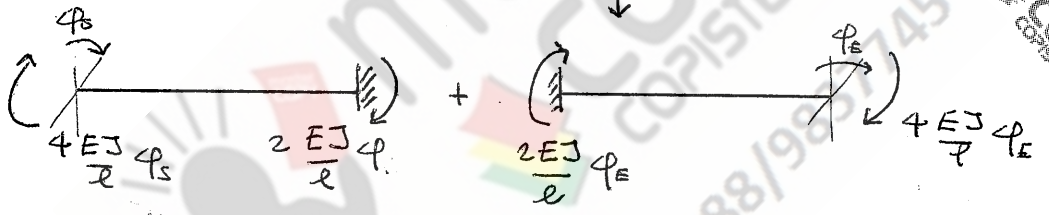


CONSIDERO UN "ELEMENTO STRUTTURALE STANDARD"



(S = STARTING = D'INIZIO
E = ENDING = DI FINE)

DETERMINO FACILMENTE M_S e M_E, E' LA SOMMA DI:



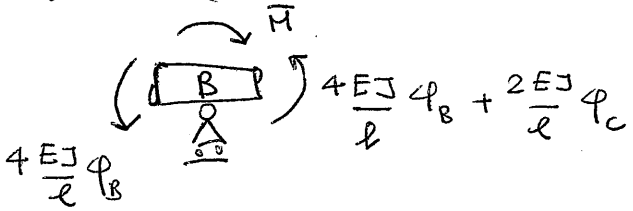
OVVERO $M_S = \frac{2EJ}{\ell}(2\varphi_S + \varphi_E)$

$M_E = \frac{2EJ}{\ell}(\varphi_S + 2\varphi_E)$

→ MEMORIZZO QUESTO RISULTATO

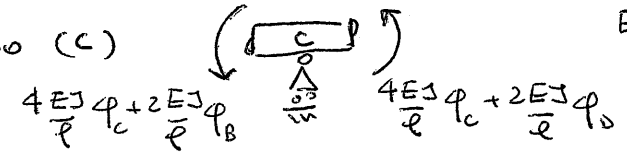
(SONO LEGAMI COSTITUTIVI)

•) NODO (B)



EQUILIBRIO: $8\varphi_B + 2\varphi_C = \bar{H}\frac{\ell}{EJ}$

•) NODO (C)



EQUILIBRIO: $8\varphi_C + 2\varphi_B + 2\varphi_D = 0$